PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE : THÉORÈME D'ABEL-ANGULAIRE

TONY LIMAGNE

Résumé. On sait que le comportement d'une fonction somme d'une série entière est très bon à l'intérieur du disque de convergence. En revanche, sur le bord du disque des situations très différentes peuvent se produire. Plus étonnant, même si la série converge en un point du bord la fonction somme n'est pas forcément continue en ce point... sauf si on limite l'angle d'approche. On obtient alors le théorème d'Abel-angulaire qui est donc par essence un résultat de prolongement par continuité. Sa preuve est basée sur une transformation d'Abel. La réciproque du théorème d'Abel est fausse. On peut toutefois obtenir une réciproque partielle dans le cas réel en contraignant le comportement du terme général : c'est le théorème taubérien faible.

Le développement ci-dessous est adapté pour les leçons 223, 230 et 243.

1. Développement

Dans la suite, on fixe (a_n) une suite de nombres complexes. Les lettres x et z désigneront respectivement une variable réelle et une variable complexe.

Théorème 1 (d'Abel-angulaire)**.** Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon 1 et de somme f. On fixe $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on note

$$\Delta_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\alpha, \alpha], z = 1 - \rho e^{\mathrm{i}\theta}\}.$$

Si la série numérique $\sum a_n$ converge alors f est continue sur $\Delta_\alpha \cup \{1\}$ (et donc en particulier $\lim_{z\to 1, z\in\Gamma_\alpha} f(z) = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$).

Démonstration. Le dessin ci-dessous sera complété au fur et à mesure de la preuve.

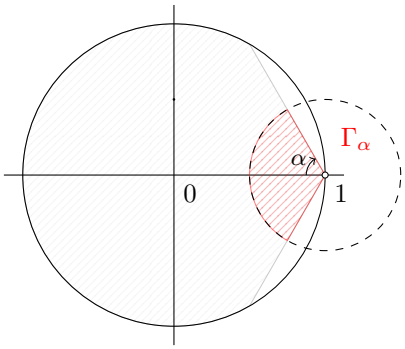

Figure 1. Configuration du théorème d'Abel-angulaire.

Date: Année 2024.

Comme la série $\sum a_n$ converge on peut définir

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

qui vérifie $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Fixons $\epsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad |R_n| \leqslant \epsilon.$$

Soit $z \in \Delta_\alpha$. En écrivant $a_k = R_{k-1} - R_k$ on peut effectuer une transformation d'Abel. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ on a alors

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (R_{k-1} - R_k) z^k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} R_k (z^{k+1} - z^k) - R_{n+p} z^{n+p} + R_n z^{n+1}.$$

Puisque $|z| < 1$ on a

$$\forall n, p \geqslant N, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k \right| \leqslant \epsilon |1-z| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |z|^k + 2\epsilon \leqslant \epsilon \left(\frac{|1-z|}{1-|z|} + 2 \right).$$

Écrivant $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ on a

$$|z|^2 = (1 - \rho\cos(\theta))^2 + \rho^2 \sin^2(\theta) = 1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2,$$

et donc par décroissance (et parité) du cosinus sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ on a

$$1 - |z|^2 = \rho(2\cos(\theta) - \rho) \geqslant \rho(2\cos(\alpha) - \rho),$$

si bien que

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|(1+|z|)}{1-|z|^2} \leqslant \frac{2}{2\cos(\alpha) - \rho} = \frac{2}{2\cos(\alpha) - |1-z|}.$$

On pose

$$\Gamma_\alpha = \Delta_\alpha \cap D(1, \cos(\alpha)[,$$

pour avoir

$$\forall z \in \Gamma_\alpha, \quad \frac{|z-1|}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{\cos(\alpha)},$$

et donc

$$\forall n, p \geqslant N, \forall z \in \Gamma_\alpha, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k \right| \leqslant \epsilon \left(\frac{2}{\cos(\alpha)} + 2 \right).$$

Puisque $\sum a_n$ converge, cette majoration est encore valable pour $z = 1$. On en déduit que la série $\sum a_k z^k$ converge uniformément sur $\Gamma_\alpha \cup \{1\}$ par le critère de Cauchy uniforme, et donc f est continue sur $\Delta_\alpha \cup \{1\}$. □

Référence : [BMP, Chap. 2, §2.1.2, Théorème 2.5].

Voici une application (non triviale !) du théorème 1.

Application 2. Pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\operatorname{Ln}(1 - e^{i\theta}),$$

où Ln est la détermination principale du logarithme.

Démonstration. On sait que :

(1) la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{in\theta}}{n}z^n$ est de rayon 1 (par le critère de D'Alembert) ;

(2) la série numérique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{in\theta}}{n}$ converge (par le critère d'Abel car $\theta\not\equiv 0 \mod 2\pi$).

On note f_θ la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{in\theta}}{n}$. Le théorème d'Abel-angulaire (par exemple pour $\alpha=\frac{\pi}{3}$) garantit que

$$\lim_{z\to 1, z\in\Gamma_\alpha} f_\theta(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in\theta}}{n}.$$

D'autre part, on sait que la fonction Ln se développe en série entière autour de 1 :

$$\forall |z|<1,\quad \operatorname{Ln}(1-z)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}.$$

En particulier, cette égalité est valable pour les éléments de Γ_α et donc par continuité du Ln sur $D(1,1]\setminus\{0\}$ on obtient

$$\lim_{z\to 1, z\in\Gamma_\alpha} f_\theta(z)=-\lim_{z\to 1, z\in\Gamma_\alpha}\operatorname{Ln}(1-ze^{i\theta})=-\operatorname{Ln}(1-e^{i\theta}).$$

□

Référence : [AM, Chap. 3, Exercice 3.23(2)].

2. Une réciproque partielle

La réciproque du théorème d'Abel-angulaire est fausse. Par exemple la série entière $\sum(-1)^n z^n$ est de rayon de convergence 1, de somme $f : z\mapsto\frac{1}{1+z}$ mais $\lim_{z\to 1, z\in\mathbb{R}} f(z)=\frac{1}{2}$ et $\sum(-1)^n$ diverge. Cependant, en ajoutant l'hypothèse supplémentaire $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$ la réciproque devient vraie.

Théorème 3 (taubérien faible)**.** Soient $\sum_{n\geqslant 1}a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f telle que $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ existe. Si $a_n=o(\frac{1}{n})$ alors la série $\sum_{n\geqslant 1}a_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

Démonstration. Notons

$$S=\lim_{x\to 1^-} f(x),$$

et posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

Soit $x\in[0,1[$. On a

$$S_n-f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k(1-x^k)-\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k x^k.$$

Puisque $1-x^k=(1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1})\leqslant k(1-x)$ alors on a

$$|S_n-f(x)|\leqslant n(1-x)M+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{k}{n}|a_k|x^k,$$

où M est un majorant de (na_n) (qui existe car $a_n = O(\frac{1}{n})$). En poussant davantage la majoration, on a

$$|S_n - f(x)| \leqslant n(1-x)M + \frac{1}{n}\sup_{k \geqslant n} |ka_k| \frac{1}{1-x},$$

Fixons $\epsilon > 0$. Puisque $a_n = o(\frac{1}{n})$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad x_n = 1 - \frac{\epsilon}{n} \in]0,1[\qquad \text{et} \qquad |na_n| < \epsilon^2,$$

de sorte que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |S_n - f(x_n)| \leqslant \epsilon(M+1).$$

On peut donc écrire

$$\lim_{n \to +\infty} (S_n - f(x_n)) = 0.$$

Or on aussi $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = S$, ce qui garantit la convergence de (S_n) vers S. □

Référence : [G, Chap. 4, §4.5, Exercice 11].

3. Quelques questions bêtes auxquelles il faut absolument savoir répondre rapidement

(1) Justifier le développement en série entière de la fonction $z \mapsto \mathrm{Ln}(1-z)$ sur $D(0,1[$.

(2) Énoncer et démontrer le le critère d'Abel.

(3)

Références

[BMP] V. Beck, J. Malick et G. Peyré, *Objectif agrégation*, 2e édition, H&K, 2005.

[AM] E. Amar et E. Matheron, *Analyse complexe*, Cassini, 2004.

[G] X. Gourdon, *Analyse*, 3e édition, Ellipses, 2020.